Algebra en Meetkunde 2009

H. Waalkens

university of groningen

Exam Problem Sheet

The exam consists of 7 problems. You can achieve 55 points in total.
The number of points for each problem is marked in brackets (you get 5 points for free).
You can find the translation of the problems into Dutch below.

1. [**4 Points.**] Let R be a ring. The *center* of R is defined as

$$Z(R) = \{a \in R \,:\, \forall x \in R \,:\, ax = xa\}\,.$$

   Show that $Z(R)$ forms a subring of R.

2. [**4+4 Points.**] Let R be a ring. For $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $r \in R$, we define $nr := r + \ldots + r$ (n times).

   (a) Suppose R is commutative. Show that

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (\star)$$

   for all $a, b \in R$ and $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. (Hint: you may use that $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.)

   (b) Show that if conversely Equation $(\star)$ holds for all $a, b \in R$ and $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ then the ring R is commutative.

3. [**4+2 Points.**] Let R be a ring, and I, J ideals of R.

   (a) Show that

$$(I+J)\cdot(I\cap J) \subset (I\cdot J) + (J\cdot I)\,. \qquad (\star\star)$$

   (b) Show that if $R = \mathbb{Z}$ then equality holds in Equation $(\star\star)$.

4. [**3+3+3 Points.**]

   Let K be a field. The *ring of dual numbers* over K with notation $K[\epsilon]$ consists of expressions of the form $a + b\,\epsilon$ with $a, b \in K$ which are added and multiplied in the following way:

$$\begin{aligned}(a+b\,\epsilon)+(c+d\,\epsilon) &= (a+c)+(b+d)\,\epsilon\,,\\ (a+b\,\epsilon)\cdot(c+d\,\epsilon) &= (ac)+(ad+bc)\,\epsilon\end{aligned}$$

   (i.e. $\epsilon^2 = 0$), for $a, b, c, d \in K$.

   (a) Prove that $K[\epsilon] \cong K[X]/(X^2)$.

   (b) Prove that $K[\epsilon]$ has exactly *three* ideals.

   (c) Prove that $K[\epsilon]^* \cong K^* \times K^+$ (as groups).

5. **[3+3 Points.]**

   (a) Show that the tangent to the circle

   $$S^1 := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a^2 + b^2 = 1\}$$

   at the point $(a,b) \in S^1$ is given by

   $$l_{(a,b)}(X,Y) = 0\,,$$

   where

   $$l_{(a,b)}(X,Y) := a(X-a) + b(Y-b) \in \mathbb{R}[X,Y]\,.$$

   (b) Let $\mathbb{R}[\epsilon]$ be the ring of dual numbers in Exercise 4. (i.e. $\epsilon^2 = 0$). Define

   $$S^1(\mathbb{R}[\epsilon]) := \{(a+s\epsilon, b+t\epsilon) \in \mathbb{R}[\epsilon] \times \mathbb{R}[\epsilon] \, : \, (a+s\epsilon)^2 + (b+t\epsilon)^2 = 1\}\,.$$

   Show that:

   $$(a+s\epsilon, b+t\epsilon) \in S^1(\mathbb{R}[\epsilon]) \Leftrightarrow l_{(a,b)}(a+s, b+t) = 0\,.$$

6. **[3+3+3 Points.]** Let $f : R_1 \to R_2$ be a (unitary) ring homomorphism between two commutative rings, $I_2 \subset R_2$ an ideal, and $I_1 := f^{-1}(I_2) \subset R_1$.

   (a) Prove: I_1 is an ideal in R_1, and R_1/I_1 is isomorphic to a subring of R_2/I_2.

   (b) Prove: if I_2 is prime in R_2 then I_1 is prime in R_1.

   (c) Give an example which shows that (b) can be wrong if both occurrences of 'prime' are replaced by 'maximal'.

7. **[2+2+2+2 Points.]**

   (a) Show that $X^n + 2$ is irreducible in $\mathbb{Z}[X]$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

   (b) Show that $Y^n - X$ is irreducible in $K[X,Y]$ (K a field) for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

   (c) Give the example of an irreducible polynomial $f \in \mathbb{Z}[X]$ with the property that $f(X^2)$ is *not* irreducible.

   (d) Let $f \in \mathbb{Z}[X]$ be a monic Eisenstein polynomial. Show that $f(X^2)$ is irreducible in $\mathbb{Z}[X]$.

Dutch Translation

1. **[4 Punten.]** Zij R een ring. Het *centrum* van R is

   $$Z(R) = \{a \in R \, : \, \forall x \in R \, : \, ax = xa\}\,.$$

   Bewijs dat dit een deelring van R is.

2. **[4+4 Punten.]** Laat R een ring zijn. Voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $r \in R$ definiëren we $nr := r + \ldots + r$ (n keer).

   (a) Stel R is commutatief. Bewijs dat

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (\star)$$

   voor alle $a, b \in R$ en $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. (Aanwijzing: Je mag gebruiken dat $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.)

(b) Bewijs omgekeerd, dat als $(\star)$ voor alle $a, b \in R$ en $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt, de ring R commutatief is.

3. **[4+2 Punten.]**
   Zij R een ring, en I, J idealen van R.

   (a) Bewijs
   $$(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J) + (J \cdot I)\,. \qquad (\star\star)$$

   (b) Bewijs dat gelijkheid in $(\star\star)$ geldt as $R = \mathbb{Z}$.

4. **[3+3+3 Punten.]**
   Zij K een lichaam. De *ring van de duale getallen* over K, notatie: $K[\epsilon]$, bestaat uit de uitdrukkingen $a + b\,\epsilon$, met $a, b \in K$, die als volgt opgeteld en vermeigvuldigd worden:
   $$\begin{aligned} (a + b\,\epsilon) + (c + d\,\epsilon) &= (a + c) + (b + d)\,\epsilon\,, \\ (a + b\,\epsilon) \cdot (c + d\,\epsilon) &= (ac) + (ad + bc)\,\epsilon \end{aligned}$$
   (dus $\epsilon^2 = 0$), voor $a, b, c, d \in K$.

   (a) Bewijs: $K[\epsilon] \cong K[X]/(X^2)$.

   (b) Bewijs dat $K[\epsilon]$ precies *drie* idealen heeft.

   (c) Bewijs: $K[\epsilon]^* \cong K^* \times K^+$ (als groepen).

5. **[3+3 Punten.]**

   (a) Ga na dat de raaklijn aan de cirkel
   $$S^1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a^2 + b^2 = 1\}$$
   in de punt $(a, b) \in S^1$ gegeven is door
   $$l_{(a,b)}(X, Y) = 0\,,$$
   waarbij
   $$l_{(a,b)}(X, Y) := a(X - a) + b(Y - b) \in \mathbb{R}[X, Y]\,.$$

   (b) Zij $\mathbb{R}[\epsilon]$ de ring van de duale getallen in Exercise 4. (d.w.z. $\epsilon^2 = 0$). Definieer
   $$S^1(\mathbb{R}[\epsilon]) := \{(a + s\epsilon, b + t\epsilon) \in \mathbb{R}[\epsilon] \times \mathbb{R}[\epsilon] \;:\; (a + s\epsilon)^2 + (b + t\epsilon)^2 = 1\}\,.$$
   Laat zien dat :
   $$(a + s\epsilon, b + t\epsilon) \in S^1(\mathbb{R}[\epsilon]) \Leftrightarrow l_{(a,b)}(a + s, b + t) = 0\,.$$

6. **[3+3+3 Punten.]** Zij $f : R_1 \to R_2$ een (unitair) homomorfisme van commutatieve ringen, $I_2 \subset R_2$ een ideaal, en $I_1 := f^{-1}(I_2) \subset R_1$.

   (a) Bewijs: I_1 is een ideaal in R_1, en R_1/I_1 is isomorf met een deelring van R_2/I_2.

   (b) Bewijs: als I_2 priem is in R_2 dan is I_1 priem in R_1.

   (c) Laat an de hand van een voorbeeld zien dat (b) fout can zijn als 'priem' beide malen vervangen wordt door 'maximaal'.

7. **[2+2+2+2 Punten.]**

   (a) Bewijs dat $X^n + 2$ irreducibel in $\mathbb{Z}[X]$ is voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

   (b) Bewijs dat $Y^n - X$ irreducibel is in $K[X, Y]$ (K een lichaam) voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

   (c) Vind een voorbeeld van een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{Z}[X]$ met de eigenschap dat $f(X^2)$ *niet* irreducibel is.

   (d) Laat $f \in \mathbb{Z}[X]$ een monisch Eisensteinpolynoom zijn. Bewijs dat $f(X^2)$ irreducibel in $\mathbb{Z}[X]$ is.